



期待値無限大の宝くじ

(直感に背く数学的考察)

1. 序論

コインを表が出るまで投げ続け、初めて表が出たときに賞金がもらえるゲームを考える。もらえる賞金は、1回目に表が出たら1円、1回目は裏が出て2回目に初めて表が出たら倍の2円、というように倍々で増えるとする。つまり、表が初めて出るまでに投げた回数を n とすると、 2^{n-1} 円もらえるものである。たとえば、10回目に初めて表が出れば512円がもらえる。このゲームにおいて主催者は賞金の期待値を算出し、参加費がその期待値以上であれば損しないと判断する。

期待値とは

確率変数 X	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_n	和
確率 P	p_1	p_2	p_3	p_4	...	p_n	1

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \dots + x_np_n$$

1個のサイコロを投げたとき、出る目の期待値は

$$1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = 3.5$$

上記の計算方法に従って、このゲームの期待値を求めると

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty$$

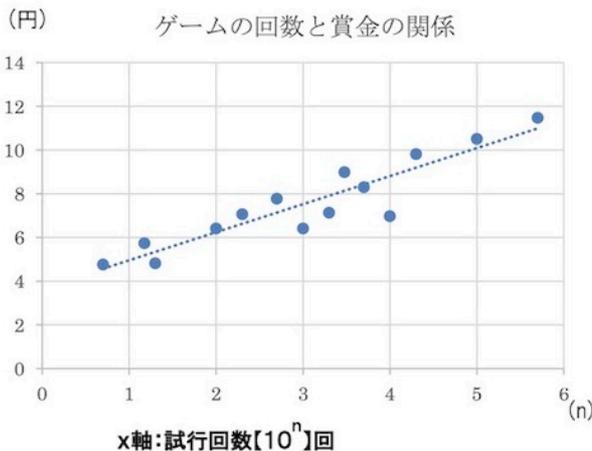
期待値から判断すると、参加費がいくら高額であっても「参加すべきである」という結論になる。ところが実際には、このゲームでは $\frac{1}{2}$ の確率で1円、 $\frac{1}{4}$ の確率で2円、 $\frac{1}{1024}$ の確率で512円の賞金が得られるに過ぎない(賞金が512円以下にとどまる確率が $\frac{1023}{1024}$)。したがって、それほど得でないことは直感的に分かる。これをサンクトペテルブルクのパラドックスという。そこで、このゲームにおける適正な参加費の設定を本研究の目標とした。

2. 実験方法

実際にコインを振った(8人で1768回)。そこで、1回10円という参加費を仮に設定すると、1768回の実験データでは93%の人が損をするということが分かった。その後、Excelのマクロを使ってコンピュータにコインを投げるといふ試行をさせることで、自分たちの手で振るには現実的ではない回数数の試行を行なった。

3. 実験(その1)とその結果

コインの表が出るまで繰り返す処理を5回ずつ、10回ずつ、15回ずつ...と繰り返した時の1回あたりの賞金の平均値の変化に規則性が見当たらなかった。そこで、 10^1 回、 10^2 回、 10^3 回というように実験回数を10倍ずつ増やして実験を繰り返したところ、1回あたりの賞金の平均値の変化に強い正の相関(相関係数0.93)があることが分かった。



この散布図に対して、回帰直線を考えた。これは対数関数を表す。試行回数を X 回、1回あたりの賞金の平均値を Y 円とすると

$$Y = \log_{5.62} X + \frac{10}{3}$$

と表される。以後、この関数をもとにゲームの金額を設定する。次に、以下のような具体的なケースを設定し、販売シミュレーションを行った。

4. 実験(その2)とその結果

このゲームの販売対象を二水高校の全校生徒及び先生の合計1275人とし、一人あたりの回数を1000回とした。

販売金額の計算方法

$$(\text{販売金額}) = 1000(\log_{5.62} X + \frac{10}{3}) \div 0.465 \dots A \text{ (注)}$$

$$X = (\text{販売人数}) \times (\text{一人あたりの回数})$$

(注) 一般に宝くじの還元率(賞金総額÷販売額×100)は46.5%といわれている。

販売金額はAより25,000円となる。次に、Excelで販売用のマクロを作成してゲームを行い、その賞金を計算した。

【ゲームを実施した結果と高額当選者一覧】

順位	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
賞金	¥ 2,101,571	¥ 4,466,017	¥ 50,336,817	¥ 315,558,413	¥ 3,155,823	¥ 2,109,895	¥ 1,577,705	¥ 50,336,073	¥ 16,741,416	¥ 3,151,930	¥ 12,587,661	¥ 8,396,922
人数	¥ 530,875	¥ 2,103,158	¥ 4,200,143	¥ 832,136	¥ 3,152,451	¥ 531,427	¥ 412,741	¥ 3,151,187	¥ 6,295,955	¥ 3,150,088	¥ 3,152,441	¥ 2,105,319
賞金	¥ 396,563	¥ 1,577,876	¥ 3,159,785	¥ 270,794	¥ 403,402	¥ 274,951	¥ 399,472	¥ 2,102,480	¥ 1,577,051	¥ 298,497	¥ 1,582,992	¥ 406,814
人数	¥ 287,614	¥ 782,376	¥ 1,583,959	¥ 201,392	¥ 274,856	¥ 266,150	¥ 206,866	¥ 1,577,145	¥ 1,062,913	¥ 202,804	¥ 431,252	¥ 398,434
賞金	¥ 141,209	¥ 541,711	¥ 790,635	¥ 200,540	¥ 207,053	¥ 204,269	¥ 202,981	¥ 794,568	¥ 790,525	¥ 202,500	¥ 402,642	¥ 391,526
人数	¥ 137,949	¥ 541,177	¥ 530,166	¥ 136,545	¥ 138,898	¥ 200,459	¥ 201,789	¥ 530,464	¥ 528,464	¥ 200,499	¥ 200,805	¥ 397,485
賞金	¥ 136,835	¥ 136,000	¥ 207,898	¥ 118,303	¥ 107,455	¥ 153,653	¥ 201,771	¥ 206,817	¥ 403,780	¥ 137,463	¥ 140,053	¥ 269,664
人数	¥ 134,997	¥ 103,120	¥ 201,976	¥ 106,928	¥ 107,395	¥ 137,854	¥ 138,825	¥ 201,467	¥ 266,435	¥ 137,211	¥ 136,224	¥ 267,058
賞金	¥ 108,401	¥ 137,521	¥ 104,785	¥ 104,334	¥ 136,508	¥ 108,577	¥ 200,883	¥ 266,343	¥ 103,485	¥ 127,087	¥ 127,087	¥ 206,606
人数	¥ 107,112	¥ 103,003	¥ 102,988	¥ 136,504	¥ 103,533	¥ 136,023	¥ 206,498	¥ 103,388	¥ 106,530	¥ 202,291	¥ 202,291	¥ 102,285
賞金	¥ 102,309	¥ 102,309	¥ 102,309	¥ 102,309	¥ 102,309	¥ 102,309	¥ 102,309	¥ 102,309	¥ 102,309	¥ 102,309	¥ 102,309	¥ 102,309
人数	¥ 102,309	¥ 102,309	¥ 102,309	¥ 102,309	¥ 102,309	¥ 102,309	¥ 102,309	¥ 102,309	¥ 102,309	¥ 102,309	¥ 102,309	¥ 102,309

黄色...賞金が1,000万円以上の人

ゲームの販売プログラムを作成し、実際に12回実験したところ、5回が還元率100%を超えてしまった。(最大で221.1%)

そこで、以下の条件を追加した。

条件1 24回連続で裏が出たらやめてもらう

条件2 1,000万円以上を獲得した人には1,000万円を支払う

この条件下でゲームの還元率を計算したところ、還元率は44.4%~98.3%(平均70.8%)であった。

5. 考察とまとめ

私たちの目的は、ゲームの還元率を46.5%にし、主催者が利益を得られるようにすることであったが、少ない回数で販売金額を設定すると、賞金額のブレが大きくなってしまった。また、一人あたりの回数を増やしても外れ値が出てしまい主催者の利益が出ないので賞金の上限を設定した。上限を1,000万円にして、25,000円で1,000回できるようにすると、1回あたり25円になり参加者も支払いやすく、主催者も利益を得ることができた。

6. 参考文献

対数の計算 <https://calculator.jp/science/logarithm/>

Wikipedia <https://ja.wikipedia.org/>

決まった回数繰り返す-繰り返し処理-Excel VBA入門

<https://www.officepro.jp/excelvba/loop/index4.html>

